Bestaat toeval?
De Bell-ongelijkheden

Klaas Landsman

Radboud Universiteit Nijmegen
Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics
Toernooiveld 1, 6525 ED NIJMEGEN

email `landsman@math.ru.nl`

5 februari 2006

Samenvatting

Dit boekje gaat over de vraag of toeval 'echt' bestaat in de natuur, in de zin dat het geen gevolg is van onze onwetendheid maar intrinsiek is. Deze vraag hangt nauw samen met de meer filosofische kwestie of 'de werkelijkheid' onafhankelijk is van de waarnemer.

Naar aanleiding van de kwantummechanica waren beide vragen tussen 1925 en 1950 inzet van een verhit debat tussen Albert Einstein en Niels Bohr, de twee grootste fysici van de twintigste eeuw. Dit debat leek in eerste instantie in een patstelling te eindigen, maar werd in 1964 door John Bell met behulp van een zuiver wiskundig argument beslecht in het voordeel van Bohr. Bell formuleerde bepaalde ongelijkheden voor correlaties (dit zijn kansen dat twee gebeurtenissen beide plaatsvinden), zodanig dat als het onderliggende toevalsproces een gevolg is van onze onwetendheid, dan aan deze ongelijkheden voldaan is. Met andere woorden, als de correlaties van een bepaald toevalsproces *niet* aan de Bell-ongelijkheden voldoen, dan is het toeval 'echt' (in de zin dat het *geen* gevolg kan zijn van onze onwetendheid). Bepaalde correlaties in de natuur blijken zowel volgens de kwantummechanica als volgens het experiment *niet* aan de Bell-ongelijkheden voldoen, zodat toeval inderdaad 'echt' bestaat, zij het slechts op zeer kleine schaal. Dit geldt als een van de diepste resultaten van de twintigste-eeuwse wetenschap.

In dit boekje leid je eigenhandig enige speciale gevallen van de Bell-ongelijkheden af uit schijnbaar onontkoombare aannamen, om vervolgens te laten zien dat deze aannamen er in feite op neer komen dat het onderliggende toevalsproces een gevolg is van onze onwetendheid. Vervolgens formuleer je een eenvoudige wiskundige versie van de kwantummechanica voor lichtdeeltjes (fotonen), om daarna aan te tonen dat deze theorie de Bell-ongelijkheden schendt. De discussie kan uiteindelijk uitwaaieren in een wiskundige, een natuurkundige, of zelfs een filosofische richting (determinisme en vrije wil).

Dit boekje is te lezen voor leerlingen uit 5 en 6 VWO met belangstelling voor wiskunde en natuurkunde. De voorkennis bestaat uit kansrekening (relatieve frequentie, het begrip kans, afhankelijke en onafhankelijke kansen, voorwaardelijke kansen) en elementaire natuurkundige begrippen rondom licht (atoom, foton, gepolariseerd deeltje).

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Toeval komt in ieders belevingswereld voor, maar het kan ook met grote wiskundige diepgang besproken worden. Laten we eens beginnen met een paar voorbeelden van toevalsprocessen.

1. *Dobbelen.* Als íets in het dagelijks leven als een toevalsproces beschouwd wordt, dan wel het gooien met een dobbelsteen. Als deze 'eerlijk' is, is de kans op iedere uitkomst 1/6. Maar is er hier wel sprake van 'echt' toeval? Of wordt de uitkomst geheel bepaald door onze handbeweging, de plaatsen en snelheden van alle moleculen in de lucht, de precieze vorm van het tafeloppervlak, enzovoort? Waarschijnlijk kies je, net als wij, voor deze laatste optie. Wij kennen de details van de handbeweging en het tafeloppervlak enzovoort niet, en daarom is de uitkomst voor ons elke keer weer een verrassing. Maar voor de natuur is het geen verrassing. De uitkomst wordt volledig bepaald door de natuurwetten. Een soortgelijk verhaal geldt voor roulette.

2. *Een enquête.* Een marktonderzoekster wil weten of een aantal ondervraagden een cd-speler en/of een dvd-speler heeft. Uiteraard ligt dat per proefpersoon vast op het moment dat de vraag wordt gesteld, maar de onderzoekster kent het antwoord pas nadat het haar is gegeven. Op grond van een uitvoerige enquête bepaalt zij ten slotte de kans dat iemand in Nederland een cd-speler heeft, de kans dat iemand een dvd-speler heeft, en de kans dat iemand beide bezit. Opnieuw is er geen sprake van echt toeval, want men heeft deze apparaten in huis of men heeft ze niet. Toch gaat de opdrachtgever bij het bepalen van de marktstrategie verder uit van de door de marktonderzoekster vastgelegde kansen, en stelt dat "de kans dat een willekeurig persoon een cd-speler heeft gelijk is aan. . . "

3. *Een bal trekken uit een vaas.* Een vaas bevat een groot aantal ballen met een bepaalde kleur (zeg rood of blauw) en een bepaald type oppervlak (zeg glad of grof). De kans dat iemand een rode bal trekt wordt gegeven door het aantal rode ballen gedeeld door het totale aantal ballen, enzovoort. Niettemin staat het resultaat van een trekking 'in de sterren geschreven': het is bepaald door de plaats van alle ballen in vaas en de armbeweging. Het spraakgebruik van toeval en de toekenning van kansen is een zuiver praktische en subjectieve aangelegenheid, die uitgaat van de cruciale aanname dat de kans om iedere bal in de vaas te trekken even groot is.

Kennen we in het *dagelijkse leven* wel 'echte' toevalsprocessen, waarbij de uitkomst *niet* in principe van tevoren vastligt? Wij (de schrijvers van dit boekje) kennen er geen. Jij wel?

We kennen wel voorbeelden van 'echt' toeval in de *natuurkunde*. Hieronder staan twee voorbeelden.

- *Radioactiviteit.* Je leest wel eens dat de halfwaardetijd van de radioactieve isotoop Rn_{222} van Radon 3.82 dagen is. Hiermee wordt bedoeld dat van een zeer grote hoeveelheid van dergelijke atoomkernen (en daarbij moet je minstens denken aan 10^{23}) na 3.82 dagen de helft is vervallen (en de andere helft niet). Dit gegeven is afkomstig uit metingen. Je zou daaruit kunnen afleiden dat de *kans* dat één enkele kern na 3.82 dagen is vervallen gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Het nieuwe ten opzichte van de vorige voorbeelden is dat het - bij de huidige stand van de wetenschap - fundamenteel onmogelijk is om te voorspellen of een *gegeven* kern Rn_{222} na 3.82 dagen ook daadwerkelijk vervallen is of niet.

- *Gepolariseerd licht.* Als een lichtbundel door een polaroid lens wordt gestuurd, blijkt (onder bepaalde condities) dat de helft van het licht wordt doorgelaten (en de andere helft geabsorbeerd). Dit lijkt enigszins op de vorige situatie. Is er in dit verband ook zo iets als één atoomkern? Jawel! In 1905 stelde Albert Einstein (1879–1955) voor dat licht uit kleine deeltjes bestaat, genaamd *fotonen*. Het is inderdaad mogelijk één enkel foton naar een polaroid lens te schieten, en dan blijkt dat de *kans* dat het wordt doorgelaten $\frac{1}{2}$ is (en de kans dat het wordt geabsorbeerd eveneens). Er zijn geen factoren bekend die beïnvloeden of een gegeven foton wordt doorgelaten of niet. Het lijkt opnieuw echt toeval te zijn.

De meeste fysici vonden (en vinden) onder aanvoering van Niels Bohr (1885–1962) dat het toeval in beide voorbeelden intrinsiek is, en dus *geen* gevolg is van onze onwetendheid (en daarmee van een vermeende gebrekkigheid van onze huidige natuurkundige theorieën, zoals in dit geval de kwantummechanica). Deze conclusie kwam ook voor de direct betrokkenen onverwacht, omdat in de klassieke natuurkunde van Isaac Newton (1642–1727), die bijvoorbeeld de planeetbanen beschrijft, alles bepaald is. Toeval is daar altijd een gevolg van onze gebrekkige kennis. Theorieën als die van Newton heten *deterministisch*, wat grofweg betekent dat de toekomst geheel door het verleden wordt bepaald. Of, zoals de islamitische geleerde Omar Khayyam (1048–1131) het uitdrukte:

> De eerste dag van de schepping schreef
> Wat de Dag des Oordeels zal lezen.

Rond 1900 waren enige verschijnselen bekend die niet zo een twee drie door de klassieke natuurkunde verklaard konden worden, zoals de zogenaamde zwarte straling (bijvoorbeeld de warmtestraling die door een fluitketel wordt geproduceerd), de spectraallijnen die atomen uitzenden, en ook radioactiviteit. (De polarisatie van licht was destijds ook al uitvoerig bestudeerd, maar werd oorspronkelijk niet als een probleem voor de klassieke natuurkunde gezien, omdat tot 1923 vrijwel niemand Einsteins foton serieus nam.) In eerste instantie konden deze verschijnselen tot op zekere hoogte door middel van een statistische aanpak worden beschreven. Het werk van Max Planck (1858–1947) in 1900 aan zwarte straling, dat vaak wordt gezien als het begin van de kwantumtheorie, had een dergelijk karakter, evenals het atoommodel van Bohr uit 1913, waarin de elektronen om de kern zwermen als planeten om de zon. In dat model kan een elektron namelijk op een onvoorspelbare manier springen van de ene baan naar de andere, waarbij (zoals Einstein in 1917 voorstelde) de breedte van een spectraallijn wordt bepaald door de kans op een dergelijke sprong. Maar toch verwachtten de meeste fysici in die tijd - met name Einstein - dat spoedig een definitieve, deterministische theorie van de microscopische wereld zou worden ontdekt, die net als Newtons theorie van de macroscopische natuur geen ruimte zou laten voor toeval in een fundamentele zin.

In januari 1926 waren er zelfs twee van zulke theorieën op de markt. De ene, opgesteld door Werner Heisenberg (1901–1976), was zeer wiskundig van aard en bevatte niets dat men zich ook maar bij benadering fysisch kon voorstellen. Heisenberg was daar zelfs trots op, omdat zo het revolutionaire karakter van zijn theorie duidelijk naar voren zou komen. De andere theorie, afkomstig van Erwin Schrödinger (1887–1961), was eveneens op geavanceerde wiskunde gebaseerd, maar ging uit van de eenvoudige voorstelling dat alle vormen van materie (en dus ook deeltjes, zoals elektronen) golven zijn. Schrödinger was veel conservatiever dan Heisenberg. Hij benadrukte niet alleen het aanschouwelijke karakter van zijn theorie, maar ook zijn visie dat deze deterministisch zou zijn. Hij hoopte daarbij dat ogenschijnlijke toevalsprocessen, zoals de boven genoemde, het gevolg waren van een soort uitmiddeling, zoals bij een enquête.

Deze hoop vervloog al na enkele maanden. Schrödinger bleek niet in staat zijn visie wiskundig waar te maken, terwijl Max Born (1882–1970) voorstelde om diens 'materiegolven' niet als werkelijk bestaande golven te interpreteren, maar als *kansen.* (We zullen later in dit boekje in een eenvoudige situatie zien hoe dit in zijn werk gaat: zie Hoofdstuk 9.) Het voorstel van Born was een keerpunt in de geschiedenis van de natuurwetenschappen: het was de eerste keer dat kansen een fundamentele plaats kregen in de natuur, en niet konden worden teruggevoerd tot onwetendheid. Dit idee vond vrijwel algehele instemming, en vormt tot de dag van vandaag de basis voor ons begrip van de microscopische wereld. In 1927 lieten de fysicus Paul Dirac (1902–1984) en de wiskundige John von Neumann (1903–1957) zien hoe de theorieën van Heisenberg en Schrödinger samenhingen, en stelden een algemene theorie op die nu als kwantummechanica bekend staat. De kwantummechanica vervangt op microscopische schaal de klassieke mechanica van Newton, en is dankzij Born *geen* deterministische theorie.

Behalve Schrödinger was ook Einstein was niet tevreden met deze uitkomst. Eind 1926 schreef hij in een brief aan Born, met wie hij bevriend was, de volgende beroemde woorden over de kwantummechanica:

> *Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt.*

In vertaling:

> De theorie levert veel op, maar brengt ons nauwelijks dichter bij het geheim van God. In ieder geval ben ik er van overtuigd dat hij niet dobbelt.

Bohr daarentegen schaarde zich (net als Heisenberg) onmiddellijk achter Born en begon zich zelfs als de kampioen van het indeterminisme te manifesteren. Naar verluidt voegde hij Einstein op zeker moment toe dat het niet aan Einstein was om te vertellen wat God had te doen en laten. Bohr en Einstein voerden tussen 1927 en 1949 een verhit debat over de mogelijke rol van het toeval in de natuur, maar werden het nooit met elkaar eens. Tot hun dood waren er ook geen argumenten om de een of de ander gelijk te geven: hun debat leek filosofisch en onoplosbaar.

In 1964 toonde John Bell (1928–1990) echter aan dat Einsteins opvatting tot bepaalde ongelijkheden leidt tussen de kansen die optreden bij processen als radio-actief verval en het doorlaten/absorberen van fotonen. Deze ongelijkheden worden zowel door de kwantumtheorie als door het experiment geschonden, en daarmee kreeg Bohr uiteindelijk gelijk. Later werd de wiskundige oorsprong van de ongelijkheden van Bell beter begrepen, en werd ingezien dat ze a priori niets met natuurkunde te maken hebben, maar met de vraag hoe je aan een gegeven toevalsproces kunt zien of het onderliggende toeval 'echt' ofwel *intrinsiek* is. Het zal blijken dat je kunt zien of toeval intrinsiek is door te kijken niet naar de kans op één gebeurtenis, maar naar *correlaties*; dit zijn de kansen dat twee (of meer) gebeurtenissen beide plaatsvinden. De conclusie van een zuiver wiskundige beschouwing zal zijn dat als een toevalsproces een gevolg is van onze onwetendheid, de correlaties dan aan bepaalde ongelijkheden voldoen. Met andere woorden, als de correlaties van een bepaald toevalsproces *niet* aan deze ongelijkheden voldoen, dan is het toeval intrinsiek. Dit is het geval voor sommige door de kwantumtheorie voorspelde én door het experiment bevestigde kansen.

Dit feit, dat zowel uit de theorie als uit het experiment volgt, is volgens velen een van de belangrijkste resultaten van de moderne wetenschap. Het beslechtte het beroemde debat tussen Bohr en Einstein in het voordeel van de eerste, en heeft volgens sommigen (onder wie de bekende wiskundige Roger Penrose) zelfs gevolgen voor het menselijk bewustzijn en de vrije wil.

2 De Bell-ongelijkheden voor twee variabelen

Stel dat je twee vragen A en B hebt, die ieder met ja (+) of nee (−) beantwoord kunnen worden. Deze vragen worden aan een groot aantal proefpersonen gesteld. Je zou, zoals al in de inleiding opgemerkt, ook kunnen denken aan een trekking uit een vaas met zeer veel ballen, die ieder twee eigenschappen hebben: kleur (A) met als mogelijkheden rood (+) of blauw (−), en type oppervlak, nl. glad (+) of grof (−). Het is in wat nu volgt niet gezegd dat deze eigenschappen gelijk verdeeld zijn; dat kan best zo zijn, maar het is ook mogelijk dat alle ballen rood en glad zijn.

Het resultaat van een enquête onder een gegeven groep personen, of van een trekking van een bepaald aantal ballen (zeg twaalf in beide gevallen, dat is handig voor de berekeningen, maar allerminst noodzakelijk) is een tabel van de volgende vorm.

Tabel 1: Resultaten enquête met twee vragen

A	B
+	-
+	+
-	-
-	-
+	-

Een *gegeven* enquête of trekking bepaalt de volgende drie relatieve frequenties F:

1. $F(A = +)$, de relatieve frequentie van het antwoord ja op vraag A (of de kleur rood bij een trekking uit de vaas), gegeven door het aantal plussen onder A gedeeld door de lengte van de tabel;

2. $F(B = +)$, de relatieve frequentie van het antwoord ja op vraag B (of het type oppervlak glad bij een trekking uit de vaas), gegeven door het aantal plussen onder B gedeeld door de lengte van de tabel;

3. $F(A = + \,\&\, B = +)$, de relatieve frequentie van het antwoord ja op beide vragen A en B (ofwel een gladde, rode bal), gegeven door het aantal keren dat de tabel ++ bevat, gedeeld door de lengte van de tabel.

In het vervolg zullen we niet met relatieve frequenties gaan werken, maar met kansen. Een kans die uit een dergelijke enquête wordt bepaald zou je, simpel gezegd, kunnen zien als een relatieve frequentie, waarbij het aantal items in een steekproef zeer groot is. Om straks verwarring te voorkomen, zullen we vanaf nu al gaan spreken over kansen, hoewel we in de komende paar paragrafen voornamelijk kijken naar kleine steekproeven.

Voor kansen wordt meestal de letter P gebruikt (voor het Engelse *probability*). Vanaf nu spreken we dus niet meer over $F(A = +)$, maar over $P(A = +)$, enzovoort. We bedoelen voorlopig precies hetzelfde.

Opgave 2.1 *1. Maak drie (of zoveel je wilt) verschillende tabellen van bovenstaande vorm. Zorg dat iedere tabel 12 rijen onder de rij met A en B heeft; het is* volkomen willekeurig *wat je daar onder invult! Er is niets op tegen dat in een van je tabellen bijvoorbeeld alleen maar plussen staan, en dat in een andere de plussen en minnen elkaar in evenwicht houden.*

2. Bereken voor iedere tabel de kansen $P(A = +)$, $P(B = +)$, en $P(A = + \,\&\, B = +)$.

3. Laat zien dat in ieder van je drie tabellen voldaan is aan de volgende ongelijkheden:

$$0 \leq P(A = + \,\&\, B = +) \leq P(A = +) \leq 1; \tag{2.1}$$

$$0 \leq P(A = + \,\&\, B = +) \leq P(B = +) \leq 1; \tag{2.2}$$

$$0 \leq P(A = +) + P(B = +) - P(A = + \,\&\, B = +) \leq 1. \tag{2.3}$$

De derde ongelijkheid (2.3) is het aller-eenvoudigste voorbeeld van een Bell-ongelijkheid. In de volgende opgave bewijs je dat voor iedere tabel aan de ongelijkheden (2.1) tot en met (2.3) voldaan moet zijn.

Opgave 2.2 *1. Leg zonder berekening uit waarom aan de ongelijkheden* (2.1) *en* (2.2) *voldaan moet zijn.*

2. Ga na dat

$$P(A = +) + P(B = +) - P(A = + \,\&\, B = +) = P(A = + \vee B = +), \tag{2.4}$$

waarbij het rechterlid staat voor de kans dat A of B met ja beantwoord worden (ofwel dat een bal ofwel rood ofwel glad, of beide is).

3. Bewijs nu dat ongelijkheid (2.3) *waar is.*

Je zult in de loop van dit project merken dat je intuïtie over kansen niet altijd betrouwbaar hoeft te zijn. We geven daarom een meer systematisch bewijs van (2.1) - (2.3) , waarbij we expliciet gebruiken dat de kansen die optreden zijn *gedefinieerd* als boven aangegeven. Dit gaat als volgt. Een tabel als Tabel 1 heeft lengte N. We noteren het aantal keer ++ met n_{++}, etc. Dan geldt:

$$P(A = +) = (n_{++} + n_{+-})/N; \tag{2.5}$$
$$P(B = +) = (n_{++} + n_{-+})/N; \tag{2.6}$$
$$P(A = + \,\&\, B = +) = n_{++}/N; \tag{2.7}$$
$$N = n_{++} + n_{+-} + n_{-+} + n_{--}. \tag{2.8}$$

Opgave 2.3 *Bewijs* (2.1) - (2.3) *uit* (2.5) - (2.8).

3 De Bell-ongelijkheden voor drie variabelen

We bekijken nu drie vragen A, B en C met antwoorden ja of nee. Je kunt hier denken aan ballen met drie eigenschappen (bedenk zelf een derde), met elk twee mogelijkheden. Een enquête of trekking leidt nu tot een tabel als aangegeven in Tabel 2.

Tabel 2: Resultaten enquête met drie vragen

A	B	C
+	-	-
+	+	+
-	-	-
-	-	+
+	-	+

Om eindeloze uitdrukkingen te voorkomen gebruiken we nu een minder expliciete maar wel heel handige notatie:

$$p_1 = P(A = +); \tag{3.1}$$
$$p_2 = P(B = +); \tag{3.2}$$
$$p_3 = P(C = +); \tag{3.3}$$
$$p_{12} = P(A = + \,\&\, B = +); \tag{3.4}$$
$$p_{13} = P(A = + \,\&\, C = +); \tag{3.5}$$
$$p_{23} = P(B = + \,\&\, C = +). \tag{3.6}$$

In deze notatie kunnen we de ongelijkheden (2.1) - (2.3) schrijven als:

$$0 \leq p_{12} \leq p_1 \leq 1; \tag{3.7}$$
$$0 \leq p_{12} \leq p_2 \leq 1; \tag{3.8}$$
$$0 \leq p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1. \tag{3.9}$$

Als we in onze nieuwe tabel met drie kolommen alleen naar de kolommen A en B kijken en de derde kolom vergeten, gelden bovenstaande ongelijkheden. Dat hebben in de vorige paragraaf bewezen. Kijken we alleen naar de kolommen A en C, dan gelden ze ook. Dit keer met aangepaste notatie natuurlijk, want we kijken nu naar p_1, p_3 en p_{13}. Evenzo gelden deze ongelijkheden als we naar de kolommen B en C kijken. We schrijven dat in het algemeen zo op:

$$0 \leq p_{ij} \leq p_i \leq 1; \tag{3.10}$$
$$0 \leq p_{ij} \leq p_j \leq 1; \tag{3.11}$$
$$0 \leq p_i + p_j - p_{ij} \leq 1, \tag{3.12}$$

waarbij i en $j \neq i$ de waarden 1, 2 en 3 doorlopen. Voor i kun je dus 1, 2 of 3 invullen. Voor j ook.

Opgave 3.1 *1. Vul voor i achtereenvolgens 1,2 en 3 in en vul voor j achtereenvolgens 1, 2 en 3 in. Welke ongelijkheden krijg je nu allemaal?*

2. Bedenk dat $p_{ij} = p_{ji}$ (waarom?). Hoeveel verschillende ongelijkheden houd je nu over?

Opgave 3.2 *1. Maak weer een stuk of drie tabellen, deze keer van de vorm van Tabel 2.*

2. Bereken voor iedere tabel de kansen p_i en p_{ij}. Kies dus voor i achtereenvolgens 1,2 en 3. Kies ook voor j achtereenvolgens 1, 2 en 3.

3. Laat zien dat in ieder van je drie tabellen opnieuw voldaan is aan de ongelijkheden (3.10) - (3.12)*, of geef een argument dat dit zonder enige nieuwe berekening bewijst.*

4. Laat zien dat in iedere tabel ook aan de volgende nieuwe ongelijkheden is voldaan:

$$0 \leq p_1 + p_2 + p_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} \leq 1; \tag{3.13}$$
$$0 \leq p_1 - p_{12} - p_{13} + p_{23} \leq 1; \tag{3.14}$$
$$0 \leq p_2 - p_{12} - p_{23} + p_{13} \leq 1; \tag{3.15}$$
$$0 \leq p_3 - p_{13} - p_{23} + p_{12} \leq 1. \tag{3.16}$$

De ongelijkheden (3.13) tot en met (3.16) zijn samen met (3.10) tot en met (3.12) de Bell-ongelijkheden voor drie variabelen, en kunnen op dezelfde manier worden bewezen als (3.10) - (3.12) in het vorige hoofdstuk. Definieer dus de grootheden n_{+++}, n_{++-}, ..., n_{---} (hoeveel in totaal?), en ga na dat bijvoorbeeld

$$p_1 = (n_{+++} + n_{++-} + n_{+-+} + n_{+--})/N, \tag{3.17}$$

waarbij N opnieuw de som van alle $n_{\pm\pm\pm}$ is.

Opgave 3.3 *1. Schrijf uitdrukkingen voor alle p_i en p_{ij} op in termen van de $n_{\pm\pm\pm}$.*

2. Bewijs (3.14)*.*

3. Beargumenteer dat het bewijs van (3.15) *en* (3.16) *vrijwel hetzelfde is.*

In dit hoofdstuk hebben we de Bell-ongelijkheden voor drie variabelen bekeken en bewezen. We hebben tot nu toe kansen gedefinieerd door middel van tabellen voortgekomen uit 'experimenten' als marktonderzoek of het trekken van een bal uit een vaas. We zeggen dat dit soort 'experimenten' een kansverdeling hebben volgens het *klassieke model*. Dat wil zeggen een toevalsproces waarvan de uitkomst al van tevoren vaststaat maar niet van tevoren bekend is. Het toeval is 'niet echt', 'niet intrinsiek'. De bijbehorende kansen voldoen kennelijk aan de Bell-ongelijkheden . We gaan dit nu precies maken.

4 Wat drukken de Bell-ongelijkheden uit?

Tot nu toe hebben we kansen gedefinieerd door middel van tabellen voortgekomen uit 'experimenten' als marktonderzoek of het trekken van een bal uit een vaas. Dergelijke kansen voldoen kennelijk aan de Bell-ongelijkheden. Om de kracht van deze ongelijkheden op waarde te schatten voeren we nu een algemener kansbegrip in, om vervolgens in te zien dat ook dan aan de Bell-ongelijkheden is voldaan. We beginnen opnieuw met het geval van twee variabelen ofwel ja/nee vragen. We voeren nu de *verzameling* X_2 van mogelijke uitkomsten in: dit is simpelweg de lijst

$$X_2 = \{++, +-, -+, --\} \tag{4.1}$$

van alle mogelijke combinaties van antwoorden op de twee vragen. Wellicht ten overvloede: het element $-+$ van de verzameling staat voor de uitkomst dat vraag A met nee wordt beantwoord, en vraag B met ja. Enzovoort.

Een *kansverdeling* op X_2 is een functie $p : X_2 \to [0, 1]$, i.e. een voorschrift dat aan ieder element van X_2 een getal tussen 0 en 1 (inclusief 0 en 1) toevoegt, en wel zo dat geldt:

$$p_{++} + p_{+-} + p_{-+} + p_{--} = 1. \tag{4.2}$$

Hier schrijven we p_{++} voor de kans op de uitkomst $++$, etc. Per definitie geldt dan

$$
\begin{aligned}
P(A = + \,\&\, B = +) &= p_{++}; && (4.3)\\
P(A = + \,\&\, B = -) &= p_{+-}; && (4.4)\\
P(A = - \,\&\, B = +) &= p_{-+}; && (4.5)\\
P(A = - \,\&\, B = -) &= p_{--}. && (4.6)
\end{aligned}
$$

Opgave 4.1 *Ga na dat iedere in Hoofdstuk 2 gemaakte tabel een kansverdeling op X_2 geeft.*

Nu volgen alle andere relevante kansen, bijvoorbeeld

$$P(A = +) = P(A = + \,\&\, B = +) + P(A = + \,\&\, B = -) = p_{++} + p_{+-}, \tag{4.7}$$

en zo ook

$$
\begin{aligned}
P(A = -) &= p_{-+} + p_{--}; && (4.8)\\
P(B = +) &= p_{++} + p_{-+}; && (4.9)\\
P(B = -) &= p_{+-} + p_{--}; && (4.10)\\
P(A = + \vee B = +) &= p_{++} + p_{+-} + p_{-+}. && (4.11)
\end{aligned}
$$

In de notatie met p_1, p_2 en p_{12} betekent dit dat

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_{++} + p_{+-}; && (4.12)\\
p_2 &= p_{++} + p_{-+}; && (4.13)\\
p_{12} &= p_{++}. && (4.14)
\end{aligned}
$$

Opgave 4.2

1. *Bewijs de ongelijkheden* (3.7) - (3.9) *uit de ongelijkheden*

$$
\begin{aligned}
0 \le p_{++} \le 1; && (4.15)\\
0 \le p_{+-} \le 1; && (4.16)\\
0 \le p_{-+} \le 1; && (4.17)\\
0 \le p_{--} \le 1, && (4.18)
\end{aligned}
$$

aangevuld met de gelijkheid (4.2).

2. *Stel dat drie gegeven (reëele) getallen p_1, p_2 en p_{12} voldoen aan de ongelijkheden* (3.7) - (3.9).

(a) Gebruik nu (4.12) - (4.14) *en* (4.2) *om de kansen* p_{++} *etc. uit te drukken in de gegeven getallen* p_1*,* p_2 *en* p_{12}*.*

(b) Laat zien dat de aldus verkregen getallen p_{++} *etc. voldoen aan* (4.2) *(tautologisch) en* (4.15) - (4.18)*.*

Je antwoord op deze opgave vormt het bewijs van het volgende uiterst belangrijke resultaat:

Stelling 4.3 *Drie getallen* p_1*,* p_2 *en* p_{12} *voldoen aan de Bell-ongelijkheden* (3.7) - (3.9) *dan en slechts dan als er een kansverdeling* p *op de verzameling van uitkomsten* X_2 *voor twee ja/nee vragen bestaat zodat* p_1*,* p_2 *en* p_{12} *door* p *worden bepaald door middel van* (4.12) - (4.14)*.*

Voor drie ja/nee vragen geldt een soortgelijk verhaal, als volgt.

Opgave 4.4 *Schrijf de verzameling* X_3 *op van alle uitkomsten van drie ja/nee vragen, en geef aan wat een kansverdeling daarop inhoudt.*

Stelling 4.5 *Zes getallen* p_1*,* p_2*,* p_3*,* p_{12}*,* p_{13} *en* p_{23} *voldoen aan de Bell-ongelijkheden* (3.10) - (3.16) *dan en slechts dan als er een kansverdeling* p *op de verzameling van uitkomsten* X_3 *voor drie ja/nee vragen bestaat zodat* $p_1, \ldots, p_{23}$ *op de voor de hand liggende manier door* p *worden bepaald.*

Opgave 4.6 *1. Wat is deze "voor de hand liggende manier"? Met andere woorden, generaliseer* (4.12) - (4.14) *tot drie variabelen.*

2. Bewijs Stelling 4.5 (en wel op dezelfde manier als Stelling 4.3).

5 Het klassieke model

De stellingen 4.3 en 4.5 drukken uit dat correlaties die aan de Bell-ongelijkheden voor twee of drie variabelen voldoen een specifieke vorm moeten hebben: de correlaties worden namelijk geheel bepaald door een zekere verzameling uitkomsten met een kansverdeling daarop. In het bovenstaande was deze verzameling X_2 of X_3, maar was de kansverdeling willekeurig. In dit hoofdstuk geven we zonder bewijs een meer algemene vorm van de genoemde twee stellingen, die er op neer komt dat correlaties voldoen aan de Bell-ongelijkheden dan en slechts dan als er een onderliggend *klassiek model* is. Dit is niets anders dan een willekeurige verzameling uitkomsten met een daarop gedefinieerde kansverdeling. Voor het gemak houden we de verzamelingen wel eindig, in de zin dat de lijst van mogelijke uitkomsten steeds eindig is. (Er bestaan ook verzamelingen met oneindig veel elementen, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.)

Deze algemeenheid is geen doel op zich. Ze is belangrijk voor het begrip van toeval wegens het volgende algemene resultaat uit de kansrekening (de zogenaamde *Dutch Book* stelling).

Stelling 5.1 *Als een toevalsproces het gevolg is van onwetendheid, dan wordt het beschreven door een klassiek model.*

Met het (nog precies te formuleren en bewijzen) resultaat uit de vorige paragraaf concluderen we dan:

Gevolg 5.2 *Als tenminste één van de Bell-ongelijkheden geschonden is, dan is het gegeven toevalsproces intrinsiek.*

We noemen een toevalsproces immers intrinsiek als het géén gevolg van onze onwetendheid is. Dit gevolg staat centraal in dit boekje, omdat, zoals we later zullen zien, bepaalde processen in de kwantumtheorie de Bell-ongelijkheden inderdaad schenden. Dit levert het door Bohr gezochte (maar niet door hem geleverde) bewijs dat het toeval in de microwereld intrinsiek is. Op deze manier had hij dus Einstein kunnen verslaan.

Wat is een 'klassiek model'? Dit is ten eerste een willekeurige verzameling $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, die zoals gezegd voor het gemak eindig gekozen wordt. Ten tweede is er een kansverdeling $p : X \to [0, 1]$ als boven, i.e. een voorschrift dat aan iedere $x \in X$ een getal tussen 0 en 1 toevoegt zodanig dat $\sum_{x \in X} p(x) = 1$. De algemene vorm van bijvoorbeeld Stelling 4.5 luidt dan:

Stelling 5.3 *Zes getallen p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13} en p_{23} voldoen aan de Bell-ongelijkheden* (3.10) - (3.16) *dan en slechts dan als er een klassiek model* (X, p) *bestaat en deelverzamelingen* A_1, A_2, A_3 *van* X *zodat*

$$p_i = p(A_i) \tag{5.19}$$

voor $i = 1, 2, 3$ *en*

$$p_{ij} = p(A_i \cap A_j) \tag{5.20}$$

voor $ij = 12, 13, 23$.

Hierbij is een deelverzameling A van X een lijst $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ waarvan iedere a_k ook voorkomt op de lijst $\{x_1, \ldots, x_n\}$. (De mogelijke deelverzameling van $\{1, 2, 3\}$ zijn dus $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, en, om puristen tevreden te stellen, ook $\{1, 2, 3\}$ zelf en de zogenaamde lege verzameling, die geen enkel element bevat.)

Hier is $A_i \cap A_j$ de doorsnede van A_i en A_j, die bestaat uit de elementen van X die zowel in A_i als in A_j zitten.

6 De Bell-ongelijkheden van de fysici

Stel dat een bepaalde ongelijkheid $a \leq b$ een gevolg is van het gehele stelsel Bell-ongelijkheden (voor twee of drie of meer variabelen). Als blijkt dat een gegeven toevalsproces niet voldoet aan $a \leq b$, dan volgt dat er geen klassiek model voor dit proces bestaat en het toeval dus echt is. Om het niet bestaan van een klassiek model te bewijzen is het dus voldoende experimenteel of theoretisch aan te tonen dat één enkel slim gekozen gevolg van de Bell-ongelijkheden geschonden is.

Natuurkundigen gebruiken de Bell-ongelijkheden niet in de tot nu toe geformuleerde versie, maar in een versie die steeds kansen bevat van de vorm $P(A \neq B)$, i.e. de kans dat het antwoord op vraag A verschillend is van dat op vraag B; dergelijke kansen blijken gemakkelijk meetbaar te zijn. Voor twee vragen hebben de Bell-ongelijkheden de schijnbaar vanzelfsprekende vorm

$$0 \leq P(A \neq B) \leq 1. \tag{6.1}$$

Hieraan is uiteraard altijd voldaan, zowel in het klassieke model van het vorige hoofdstuk als in de kwantummechanica, want een kans is een kans, en die ligt per definitie tussen 0 en 1. Om deze reden hebben fysici het vrijwel nooit over de Bell-ongelijkheden voor twee variabelen.

Voor drie of meer variabelen is de situatie een stuk beter. Voor drie vragen A, B en C luidt de Bell-ongelijkheid van de natuurkundigen:

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C). \tag{6.2}$$

Opgave 6.1 1. *Neem aan dat een klassiek model bestaat, en druk $P(A \neq C)$, $P(A \neq B)$ en $P(B \neq C)$ uit in de acht elementaire kansen $p_{+++}, \ldots p_{---}$.*

2. *Bewijs hieruit* (6.2).

In de experimentele natuurkunde blijkt het in de praktijk het eenvoudigst te zijn de schending van Bell-ongelijkheden in vier variabelen te meten, waarbij het afdoende is om uitsluitend correlaties tussen vraag 1 en 3, 1 en 4, 2 en 3, en 2 en 4 te beschouwen. We zullen later zien waarom dit is. Het volledige stelsel Bell-ongelijkheden blijkt dan als volgt te zijn: behalve (3.10) - (3.12), waar de indices i en j nu de waarden 1 tot en met 4 doorlopen, geldt ook nog

$$0 \leq p_1 + p_4 + p_{23} - p_{13} - p_{14} - p_{24} \leq 1; \tag{6.3}$$

$$0 \leq p_2 + p_4 + p_{13} - p_{23} - p_{24} - p_{14} \leq 1; \tag{6.4}$$

$$0 \leq p_1 + p_3 + p_{24} - p_{14} - p_{13} - p_{23} \leq 1; \tag{6.5}$$

$$0 \leq p_2 + p_3 + p_{14} - p_{24} - p_{23} - p_{13} \leq 1. \tag{6.6}$$

De door fysici gebruikte Bell-ongelijkheden voor vier vragen A, B, C en D luidt

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq D) + P(B \neq C) + P(B \neq D). \tag{6.7}$$

We zullen later zien hoe en waarom (6.7) in de kwantummechanica geschonden wordt.

Opgave 6.2 *1. Ga na dat* (6.7) *in een paar tabellen geldt.*

2. Hoe zou je (6.7) *kunnen bewijzen?*

7 Schending van de Bell-ongelijkheden

De conceptueel meest overtuigende schending van de Bell-ongelijkheden treedt op in het geval van drie vragen; de meest precies gemeten *experimentele* schending heeft echter betrekking op vier variabelen. We beginnen met het eerste; de natuurkundige details volgen later.

Twee lichtdeeltjes (fotonen) worden gelijktijdig door een atoom geproduceerd, en vliegen ieder een andere kant op; zeg naar links en naar rechts. Aan ieder van de twee deeltjes kunnen in principe drie metingen worden verricht, die we zien als ja/nee vragen A, B, C. Vraag A is: wordt het foton doorgelaten door een polarisator met hoek θ_A (t.o.v. een vast gekozen as loodrecht op de bewegingsrichting, bijv. de z-as)? Enzovoort. De natuurkundige details zijn op dit moment niet zo belangrijk. Als vraag A aan het linkerfoton wordt gesteld noemen we de vraag A_L, als zij aan het rechterfoton wordt gesteld noemen we haar A_R, enzovoort. Er zijn om te beginnen dus niet drie maar zes vragen, te weten $A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R$. Wat zijn nu de saillante eigenschappen van de situatie?

- **Meetresultaat:** *als we uitsluitend aan de linkerkant meten is de kans op het antwoord "ja" bij ieder van de drie vragen* A_L, B_L, C_L *gelijk aan* $\frac{1}{2}$*:*

$$P(A_L = +) = P(B_L = +) = P(C_L = +) = \tfrac{1}{2}. \tag{7.1}$$

Als we uitsluitend aan de rechterkant kijken geldt precies hetzelfde voor A_R, B_R, C_R*:*

$$P(A_R = +) = P(B_R = +) = P(C_R = +) = \tfrac{1}{2}. \tag{7.2}$$

Er is hier dus sprake van een toevalsproces. De gegeven kansen zijn berekend met behulp van de kwantummechanica en getoetst door het experiment een groot aantal keren te herhalen.

Maar nu komt een verrassing.

- **Meetresultaat:** *als aan twee kanten, links en rechts dus, tegelijk metingen worden verricht, dan blijkt het volgende:*

$$\begin{aligned} P(A_L = + \,\&\, A_R = +) &= \tfrac{1}{2}; & (7.3)\\ P(A_L = - \,\&\, A_R = -) &= \tfrac{1}{2}; & (7.4)\\ P(A_L = + \,\&\, A_R = -) &= 0; & (7.5)\\ P(A_L = - \,\&\, A_R = +) &= 0. & (7.6) \end{aligned}$$

Dit impliceert

$$\begin{aligned} P(A_L = A_R) &= 1; & (7.7)\\ P(A_L \neq A_R) &= 0. & (7.8) \end{aligned}$$

Idem dito voor B *en* C *i.p.v.* A.

Met andere woorden: *de twee fotonen reageren altijd precies hetzelfde als aan beide kanten dezelfde meting wordt verricht* (ofwel dezelfde vraag wordt gesteld). Als de polarisatoren beide onder dezelfde hoek worden opgesteld, worden beide fotonen ofwel doorgelaten, ofwel niet doorgelaten.

De situatie dat het linkerfoton onder hoek θ niet wordt doorgelaten en het rechterfoton wel, komt *niet* voor (en het omgekeerde evenmin).

Deze gang van zaken lijkt in eerste instantie zeer vreemd. Aan beide kanten vindt een toevalsproces plaats, maar deze twee processen zijn perfect op elkaar afgestemd. Dit is zelfs het geval als het linkerfoton kilometers van het rechterfoton verwijderd is (dit is in Wenen gemeten door een rioolbuis onder de Donau op een afstand van 10 kilometer!). Nu geldt sinds Einstein een

- **Natuurwet:** *noch de meetopstelling, noch de uitkomst van de meting aan de linkerkant kan de gang van zaken aan de rechterkant beïnvloeden (en omgekeerd).*

Als de twee metingen gelijktijdig plaatsvinden, is het namelijk fysisch onmogelijk dat het ene foton een signaal naar het andere uitzendt dat de meting daaraan nog kan beïnvloeden; de uitwisseling van signalen gaat met de lichtsnelheid, en die is eindig (ofschoon zeer groot: 300.000 km/s). De ene uitkomst kan de andere dus niet veroorzaken.

Na enig nadenken lijkt er een eenvoudige verklaring voor het waargenomen gedrag te bestaan: de uitkomsten van de metingen links en rechts liggen al vast zodra het fotonenpaar wordt geproduceerd. Er zou een bepaalde interne vrijheidsgraad van het atoom kunnen zijn, die vastlegt hoe de uitgezonden fotonen gaan reageren op alle mogelijke experimenten. Deze vrijheidsgraad wordt niet waargenomen, zoals ook de precieze loop van een dobbelsteen (die vastlegt hoe hij valt) niet wordt waargenomen. Maar de uitkomst zou in principe vast kunnen liggen. De toestand van de fotonen moet dan wel per keer veranderen om de kansen $\frac{1}{2}$ links en rechts te verkrijgen, maar het zou best kunnen dat een diepere theorie dan de kwantumtheorie daar toe in staat is. Dit zou de meetuitkomsten zoals tot nu toe vermeld kunnen verklaren; sterker nog, dit lijkt de *enige* redelijke verklaring.

Vergelijk het met een vaas met een groot aantal rode en blauwe ballen. Alice trekt steeds tegelijk een rode en een blauwe bal, en stuurt een van de twee naar links en de andere naar rechts. Ver van haar vandaan staan links en rechts twee waarnemers, Leo en Ruud, die ieder de bewuste bal opvangen. Deze actie wordt voortdurend herhaald, waarbij Alice steeds een muntje opgooit om te bepalen of zij de rode of de blauwe bal naar links stuurt (en de andere kleur dus naar rechts). Voor Leo en Ruud is sprake van een toevalsproces: ze krijgen de helft van de keren een rode bal, en de helft van de keren een blauwe. Toch is er een perfectie correlatie tussen de individuele uitkomsten: als Leo een rode bal krijgt weet hij zeker dat Ruud een blauwe heeft, en omgekeerd. Maar daar is niets mysterieus aan: de uitkomst lag al vast zodra Alice haar muntje had opgegooid, en is niet het gevolg van telepathie tussen Leo en Ruud. Het toeval dat zij waarnemen is het gevolg van het feit dat zij niet weten hoe het muntje van Alice valt.

Einstein deed dezelfde aanname als wij op dit moment:

- **Aanname van Einstein:** *Op het moment dat het fotonpaar ontstaat (en dus nog met elkaar in contact staat) liggen de meetuitkomsten links en rechts al vast (ook als deze metingen niet daadwerkelijk worden verricht), en wel op zo'n manier dat het linkerfoton en het rechterfoton altijd hetzelfde antwoord geven als links en rechts dezelfde vraag wordt gesteld.*

Het laatste deel van deze aanname wordt afgedwongen door het meetresultaat (7.7).

Zoals gezegd lijkt dit de enige manier om de correlaties in het tweede meetresultaat boven te verklaren: omdat de meetuitkomsten al van tevoren vastliggen, volgt uit de aanname van Einstein tevens dat het toeval in dit proces een gevolg is van onze onwetendheid (net als in het voorbeeld met Alice, Leo en Ruud).

Klopt deze verklaring? Onder deze aanname maakt het niet meer uit of een vraag aan het ene of aan het andere foton wordt gesteld; het antwoord is immers altijd hetzelfde. We kunnen de vragen A_L en A_R dus beide gewoon met A aanduiden, en idem dito voor B en C, en er gelden nu gelijkheden als

$$P(A_L = + \,\&\, A_R = +) \;=\; P(A = +); \tag{7.9}$$

$$P(A_L = + \,\&\, B_R = -) \;=\; P(A = + \,\&\, B = -), \tag{7.10}$$

$$P(B_L = + \,\&\, C_R = -) \;=\; P(B = + \,\&\, C = -), \tag{7.11}$$

enzovoort.

Opgave 7.1 *Denk goed na over de situatie, en laat zien dat het experiment onder de gegeven aanname kan worden beschreven door een klassiek toevalsproces met drie (i.p.v. zes) vragen, en dat daarmee aan de Bell-ongelijkheden is voldaan.*

De aanname verklaart per definitie de correlaties (7.3) - (7.6), maar hoe zit het met de situatie waarin links en rechts een andere vraag wordt gesteld? In dat geval moeten de kansen $P(A_L = + \,\&\, B_R = -)$ enz. aan de Bell-ongelijkheden (3.10) - (3.16) voor drie vragen voldoen - en daarmee ook aan de ene gevolgtrekking (6.2) daaruit.

We zullen nu zuiver wiskundig laten zien hoe deze ongelijkheden in de natuur worden geschonden; de natuurkundige details volgen later. Het gaat hier om metingen aan een foton dat langs de positieve y-as beweegt met polarisatie-as $(0, 0, 1)$; vraag A is of het foton door een polarisator met as $(\sin\theta_A, 0, \cos\theta_A)$ wordt doorgelaten, vraag B is of hetzelfde deeltje door een polarisator met as $(\sin\theta_B, 0, \cos\theta_B)$ wordt doorgelaten, en idem dito voor vraag C. Kwantumtheorie én experiment geven:

$$P(A_L \neq B_R) = \sin^2(\theta_A - \theta_B); \tag{7.12}$$
$$P(A_L \neq C_R) = \sin^2(\theta_A - \theta_C); \tag{7.13}$$
$$P(B_L \neq C_R) = \sin^2(\theta_B - \theta_C). \tag{7.14}$$

Schrijf nu A in plaats van A_L of A_R enzovoort, zoals uitgelegd in de vorige paragraaf. Dan moet dus gelden:

$$P(A \neq B) = \sin^2(\theta_A - \theta_B); \tag{7.15}$$
$$P(A \neq C) = \sin^2(\theta_A - \theta_C); \tag{7.16}$$
$$P(B \neq C) = \sin^2(\theta_B - \theta_C). \tag{7.17}$$

Opgave 7.2 *Laat zien dat er hoeken bestaan waarvoor* (6.2) *geschonden is. Hint: kies* $\theta_A = 0$, $\theta_B = 3\theta$ *en* $\theta_C = \theta$ *en gebruik de grafische rekenmachine.*

Deze conclusie is niet mals! Einsteins aanname leidt onherroepelijk tot de Bell-ongelijkheden (6.2), en zowel experiment als kwantumtheorie leidden even onherroepelijk tot de schending daarvan. De aanname is dus fout.

8 Common causes

In deze paragraaf gaan we nog wat dieper op de kansrekening in, zodat we wiskundig gezien nog wat preciezer kunnen werken. Als twee gebeurtenissen x en y (waar x bijvoorbeeld staat voor "$A_L = +$", etc.) respectievelijk een kans $P(x)$ en $P(y)$ hebben om op te treden, vertelt de kansrekening ons dat ze *onafhankelijk* zijn als geldt

$$P(x\&y) = P(x)P(y). \tag{8.1}$$

Als dit niet zo is, noemen we x en y *gecorreleerd*. In de situatie van het vorige hoofdstuk verwachtten we in eerste instantie dat de gebeurtenis $A_L = +$ onafhankelijk was van zowel $A_R = +$ als $A_R = -$, en evenzo $A_L = -$ t.o.v. $A_R = +$ en $A_R = -$, maar de werkelijkheid floot ons terug.

Opgave 8.1 *Gegeven* (7.1) *en* (7.2), *hoe hoe zouden* (7.7) *en* (7.8) *moeten luiden als de antwoorden op* A_R *en* A_L *onafhankelijk van elkaar zijn?*

We hebben hier een perfecte correlatie tussen A_L en A_R. We zullen in het vervolg gebruik maken van de volgende definitie uit de kansrekening:

Definitie 8.2 *Als* z *een gebeurtenis is met kans* $P(z) \neq 0$ *en* x *een willekeurige andere gebeurtenis, dan is de* voorwaardelijke kans *van* x *gegeven* z *gelijk aan*

$$P(x|z) = \frac{P(x\&z)}{P(z)}. \tag{8.2}$$

We zien onmiddellijk uit (8.1) en (8.2) dat x en z precies onafhankelijk zijn als $P(x|z) = P(x)$.

De filosoof Hans Reichenbach voerde in 1956 het volgende begrip in.

Definitie 8.3 *Stel dat x en y gebeurtenissen zijn die elkaar niet direct kunnen beïnvloeden (bijvoorbeeld omdat ze gelijktijdig en ver van elkaar plaatsvinden), en stel dat $P(x\&y) \neq P(x)P(y)$ (m.a.w. x en y zijn gecorreleerd). Dan is een derde gebeurtenis z een* common cause *van x en y als z in het verleden van x en y plaats heeft (en aldus x en y kan beïnvloeden), en bovendien geldt*

$$P(x\&y|z) = P(x|z)P(y|z). \tag{8.3}$$

De bedoeling van deze definitie is dat correlatie tussen x en y geheel verklaard wordt door z. *Gegeven* z zijn x en y onafhankelijk. Dit idee blijkt ook uit het volgende:

Opgave 8.4 *Stel dat $P(y|z) \neq 0$. Toon aan dat* (8.3) *dan niets anders is dan*

$$P(x|z) = P(x|y\&z). \tag{8.4}$$

Als z plaatsvindt, maakt het voor de kans op x dus niets meer uit of y plaatsvindt: de verklaring voor x komt van z. Hierbij is de common cause zelf dus mogelijk ook een toevalsproces. En analoog: als $P(x|z) \neq 0$, dan is (8.3) equivalent met

$$P(y|z) = P(y|x\&z). \tag{8.5}$$

Als er één common cause z voor een gegeven correlatie is, kunnen we deze uitbreiden tot een klassiek model

$$Z = \{z_1 = z, z_2 = z^{\perp}\}, \tag{8.6}$$

waar $z^{\perp}$ voor "niet-z"staat, i.e. de uitspraak dat z niet plaatsvindt (als z staat voor $A = +$ dan is $z^{\perp}$ dus $A = -$). De bijbehorende kansen zijn dan uiteraard $p(z_1) = P(z)$ en $p(z_2) = 1 - P(z)$.

Er hoeft niet één enkele common cause voor een correlatie te zijn. Om een bepaalde correlatie te verklaren neemt men dan aan dat er een verzameling $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ bestaat (we houden deze voor het gemak eindig) met een kansverdeling $p : Z \to [0, 1]$ (zodat $\sum_{i=1}^{n} p(z_i) = 1$). We nemen aan dat

$$p(z_i) > 0 \tag{8.7}$$

voor alle i (anders kunnen we z_i net zo goed weglaten). Denk bijvoorbeeld aan x en y als auto's op een snelweg, die normaliter op de rechter weghelft rijden, maar af en toe naar links uitwijken om in te halen. Stel dat deze auto's achter elkaar rijden en ieder voor zich een kans van $\frac{1}{2}$ hebben om naar links te duiken (en terug). Nu blijkt dat ze meestal tegelijk naar links gaan. De verzameling van common causes kan dan zo worden gekozen dat z_i voor gegeven i staat voor een auto die rechts rijdt met een snelheid in een bepaald interval. Hoe lager die snelheid, hoe hoger de kans dat er wordt ingehaald. Je kunt dit voorbeeld verder zelf uitwijken en daar leuke getalletjes uit produceren.

Alle gebeurtenissen in Z kunnen x en y potentieel beïnvloeden, en omdat in ieder geval *een* gebeurtenis z_i plaatsvindt, moet gelden

$$P(x) = \sum_i P(x\&z_i) = \sum_i p(z_i)P(x|z_i). \tag{8.8}$$

Het zou best kunnen dat geen van de z_i ook maar iets te maken heeft met x, zodat geldt $P(x\&z_i) = P(x)p(z_i)$; ook dan klopt (8.8) uiteraard (waarom?). Als alle z_i een common cause zijn voor geveven x en y geldt naast

$$P(y) = \sum_i P(y\&z_i) = \sum_i p(z_i)P(y|z_i) \tag{8.9}$$

en

$$P(x\&y) = \sum_i P(x\&y\&z_i) = \sum_i p(z_i)P(x\&y|z_i) \tag{8.10}$$

nu ook het common cause principe

$$P(x\&y|z_i) = P(x|z_i)P(y|z_i). \tag{8.11}$$

In de situatie van het vorige hoofdstuk ligt het vanwege de aldaar geformuleerde natuurwet buitengewoon voor de hand een common cause aan te nemen voor de gemeten correlaties tussen A_L en A_R, etc.; de aanname van Einstein in dat hoofdstuk is, zoals we zullen zien, niets anders dan een common cause met de bijzondere eigenschap dat een gegeven z_i de meetuitkomsten volledig bepaalt (iets dat i.h.a. niet hoeft te gelden voor common causes). Vanuit het perspectief van het huidige hoofdstuk kunnen we de discussie uit het vorige als volgt wiskundig precies maken:

- **Aanname van Bell:** *In de situatie van het fotonpaar uit het vorige hoofdstuk is er een onderliggend toevalsproces, beschreven door een verzameling $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ met een kansverdeling $p : Z \to [0, 1]$, zodanig dat*

$$P(X_L = \pm|z_i \,\&\, Y_R = \pm) = P(X_L = \pm|z_i); \tag{8.12}$$
$$P(Y_R = \pm|z_i \,\&\, X_L = \pm) = P(Y_R = \pm|z_i), \tag{8.13}$$

  waar X en Y staan voor A, B, of C.

Met andere woorden, de aanname (8.12) omvat alle aannamen van de vorm

$$P(A_L = +|z_i \,\&\, B_R = -) = P(A_L = +|z_i), \tag{8.14}$$

en soortgelijk met L en R verwisseld, bijvoorbeeld

$$P(C_R = -|z_i \,\&\, C_L = -) = P(C_R = -|z_i). \tag{8.15}$$

Dit drukt uit dat *gegeven* z_i de meetuitkomst + of − links bij een gegeven meetopstelling (of 'vraag') A_L, B_L, of C_L niet afhangt van zowel de meetopstelling rechts als de uitkomst van de desbetreffende meting aldaar. En omgekeerd.

Opgave 8.5 *Laat zien dat* (8.12) *en* (8.13) *impliceren dat ieder van de gebeurtenissen z_i een common cause is voor alle paren (X_L, Y_R). Met andere woorden, bewijs uit* (8.12) *en* (8.13) *dat*

$$P(X_L = \pm \,\&\, Y_R = \pm|z_i) = P(X_L = \pm|z_i)P(Y_R = \pm|z_i). \tag{8.16}$$

Ten overvloede: (8.16) staat voor alle gelijkheden van de vorm

$$P(A_L = + \,\&\, C_R = -|z_i) = P(A_L = +|z_i)P(C_R = -|z_i), \tag{8.17}$$

en de variabelen x en y in (8.3) zijn nu $A_L = +$ en $C_R = -$ en dergelijke.

Je gaat nu aantonen dat in het proces uit het vorige hoofdstuk de aanname van Bell impliceert dat een gegeven z_i de meetuitkomsten vastlegt.

Opgave 8.6 *Neem aan dat* (7.7) *en* (7.8) *gelden, en tevens de aanname van Bell (en daarmee* (8.16)*). Laat zien dat dan voor iedere $z_i \in Z$ en $X = A, B, C$ geldt dat ofwel*

$$P(X_L = +|z_i) = 1 \text{ en } P(X_R = +|z_i) = 1, \tag{8.18}$$

ofwel

$$P(X_L = -|z_i) = 1 \text{ en } P(X_R = -|z_i) = 1. \tag{8.19}$$

Omdat (vanzelfsprekend) geldt dat

$$P(X_L = +|z_i) + P(X_L = -|z_i) = 1; \tag{8.20}$$
$$P(X_R = +|z_i) + P(X_R = -|z_i) = 1, \tag{8.21}$$

is (8.18) equivalent met

$$P(X_L = -|z_i) = 0 \text{ en } P(X_R = -|z_i) = 0, \tag{8.22}$$

terwijl (8.19) equivalent is met

$$P(X_L = +|z_i) = 0 \text{ en } P(X_R = +|z_i) = 0. \tag{8.23}$$

Opgave 8.7 *1. Beargumenteer met behulp van Opgave 8.6 dat - gegeven* (7.7) *en* (7.8) *- de aanname van Einstein uit die van Bell volgt.*

2. Beargumenteer met behulp van Opgaven 7.1 dat de aanname van Bell impliceert dat aan de Bell-ongelijkheden voor drie variabelen is voldaan.

Net als in het vorige hoofdstuk volgt dus uit de werkelijke meetresultaten (7.12) - (7.14) dat de aanname van Bell niet geldig kan zijn! De aanname van Bell kan dus niet gelden.

We zullen nu de Bell-ongelijkheden voor vier variabelen (6.3) - (6.6) afleiden uit het bestaan van een common cause (die op zijn beurt weer kan worden afgeleid uit de aanname van Bell, zoals boven). Aangezien deze alle vier dezelfde vorm hebben, nemen we als voorbeeld slechts (6.5). De aanname van Bell is van kracht als A en B aan de ene kant geen invloed kunnen hebben op C en D aan de andere kant; je kunt A en B desgewenst dus interpreteren als metingen aan het linkerfoton onder twee verschillende hoeken, en C en D als metingen aan het rechterfoton onder twee verschillende hoeken (die niet hetzelfde hoeven te zijn als die aan de linkerkant, zoals in het vorige voorbeeld).

Opgave 8.8 *Leid* (6.5) *af uit* (8.8) - (8.11) *voor* $x = A, B$ *en* $y = C, D$.
Hint: voor getallen a, b, c, d *die ieder tussen 0 en 1 liggen geldt:*

$$0 \leq a + c + bd - ac - bc - ad \leq 1. \tag{8.24}$$

Als je zin hebt bewijs je ook de hint!

9 Kwantumtheorie voor beginners

We pakken de draad van de inleiding nu weer op. Het is daarbij echter niet onze bedoeling een inleiding te geven op de fysische achtergronden van de kwantumtheorie. Daarvoor verwijzen we naar populair-wetenschappelijke boeken zoals:

- G. Zukav, *The Dancing Wu-Li Masters* (vertaald als: *De Dansende Wu-Li Meesters*);
- J. Gribbin, *In Search of Schrodinger's Cat*;
- R. Penrose, *The Emperor's New Mind*;
- G. Ghirardi, *Sneaking a Look at God's Cards*;
- A. Rae, *Quantum Physics: Illusion or Reality*;
- S. Mailin, *Nature Loves to Hide: Quantum Physics and the Nature of Reality, a Western Perspective*;
- K. Landsman, *Requiem voor Newton*;
- A. Zeilinger, *Toeval!*.

De boeken van Zukav, Penrose en Landsman zijn in de meeste openbare bibliotheken te vinden, en dat van Zeilinger binnenkort waarschijnlijk ook. Voor de rest kun je een student vragen ze voor je uit een Universiteitsbibliotheek te lenen, of ze cadeau vragen. Als je specifiek geïnteresseerd bent in het verband tussen kwantumtheorie en het brein is naast het boek van Penrose ook *The Mind Matters* van D. Hodgson de moeite waard.

In dergelijke boeken vind je verhalen over golven, deeltjes, interferentie, en onzekerheidsrelaties. We houden ons hier vooral bezig met de wiskunde achter de kwantumtheorie, maar om deze te kunnen plaatsen zonder de fysische bagage die je pas op de universiteit krijgt als je natuurkunde of wiskunde studeert, poneren we de volgende drie begripsmatige uitgangsspunten van de kwantumtheorie:

1. De kwantumtheorie is een spel van *vragen* aan en *antwoorden* van de natuur. Alle vragen kunnen worden opgebouwd uit vragen met als enig mogelijke antwoorden 'ja' en 'nee'. Voorbeeld: de vraag 'hoe oud ben jij?' kan worden opgebouwd uit vragen van de vorm: 'ben jij 17?'; ben jij '42'? enzovoort. We kunnen ons dus tot dergelijke vragen beperken, die *elementair* worden genoemd.
2. De antwoorden op alle mogelijke vragen die we een fysisch systeem (zoals een lichtkwantum ofwel foton) kunnen stellen worden volledig bepaald door de *toestand* waarin dit systeem zich bevindt. De toestand van een systeem wordt in de kwantumtheorie vaak met de Griekse letter ψ aangeduid, omdat deze en gevoel van mysterie oproept.
3. De toestand geeft i.h.a. geen *zekere* antwoorden 'ja' of 'nee', maar alleen bepaalde *kansen* op deze antwoorden.

Ruw en enigszins ahistorisch gezegd gaf Heisenberg de wiskundige beschrijving van de vragen, en Schrödinger die van de toestanden. Punt 3 was de bijdrage van Born. De definitieve wiskundige formulering van de kwantumtheorie, waarvan de theorie die nu volgt een sterk vereenvoudigde versie is, is afkomstig van Von Neumann en Dirac.

Deze formulering is gebaseerd op de begrippen *vector* en *inproduct*. In het algemeen leven vectoren in de wiskunde in ruimtes van willekeurige dimensie - zelfs oneindig is mogelijk! -, maar voor dit project is het voldoende ons tot het platte vlak te beperken. We noemen het platte vlak $\mathbb{R}^2$, omdat voor de specificatie van een punt twee reële getallen nodig zijn. Deze specificatie is bepaald ten opzichte van een willekeurig gekozen punt, dat $(0,0)$ heet. Ieder ander punt (a,b) bepaalt een pijl van $(0,0)$ naar (a,b), die we $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ noemen. Een dergelijke pijl is nu een *vector*: het is een variabele met een lengte, nl.

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2} \tag{9.1}$$

(volgens Pythagoras) en een richting (namelijk die waarin de pijl wijst). Je kunt twee vectoren optellen volgens

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}; \tag{9.2}$$

in een plaatje betekent dit dat je de tweede vector achter de eerste plaatst. Het is duidelijk dat

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

We zullen vectoren vaak als v of w schrijven, en dan luidt deze formule

$$v+w=w+v. \tag{9.4}$$

Je kunt een vector ook met een getal t vermenigvuldigen volgens

$$t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Als $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan schrijven we het rechterlid van (9.5) als tv. Let op wat er gebeurt voor $t=-1$: bij iedere vector v hoort een vector $-v$ (dit is de vector die in de tegengestelde richting wijst en dezelfde grootte heeft) met de eigenschap

$$v+(-v)=0, \tag{9.6}$$

waarbij de 0 in het rechterlid niet het getal 0 is maar de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Deze eigenschappen worden in de wiskunde als basis genomen voor het begrip vector! Wat voorop staat is dan niet meer een plaatje met pijltjes, maar een hoeveelheid eigenschappen: *een wiskundig object wordt bepaald door zijn eigenschappen.* Het is dan geen enkel probleem vectoren in willekeurige dimensie te definieren.

Voor de kwantumtheorie is het *inproduct* tussen twee vectoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ van groot belang. Dit is geen vector, maar het getal

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := a_1 a_2 + b_1 b_2. \tag{9.7}$$

Zie ook het bijgeleverde studiemateriaal (dat evenwel gaat over vectoren en inproducten in $\mathbb{R}^3$). Het blijkt dat (bedenk een bewijs of vraag het aan je leraar!)

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\| \cos\theta, \tag{9.8}$$

waar $\cos\theta$ de hoek tussen de twee gegeven vectoren is. Met de afkortingen v en w is deze formule te schrijven als

$$< v, w >= \|v\| \cdot \|w\| \cos\theta_{v,w}, \tag{9.9}$$

waarbij $\theta_{v,w}$ uiteraard de hoek tussen v en w is. Omdat de hoek tussen een vector en zichzelf 0 is, geldt volgens (9.9)

$$< v, v >= \|v\|^2. \tag{9.10}$$

Je ziet dan uit (9.1) en (9.7) dat (9.9) een generalisatie is van de stelling van Pythagoras! Uit (9.7) volgen rekenregels als

$$\begin{aligned} < v, w > &= < w, v >; && (9.11)\\ < tv_1 + v_2, w > &= t < v_1, w > + < v_2, w >; && (9.12)\\ < v, v > &\geq 0; && (9.13)\\ < v, v >= 0 &\Leftrightarrow v = 0. && (9.14) \end{aligned}$$

Ook hier geldt dat, net als bij het begrip vector zelf, de rekenregels voor het inproduct kunnen worden gezien als de definierende eigenschappen ervan. Later zul je nodig hebben dat

$$< v, tw_1 + w_2 >= t < v, w_1 > + < v, w_2 >, \tag{9.15}$$

hetgeen een gevolg is van (9.11) en (9.12).

Dit is alle wiskunde die je nodig hebt om de kwantumtheorie van gepolariseerd licht te begrijpen! Het verband is als volgt:

1. *Een elementaire vraag A wordt in de kwantumtheorie wiskundig voorgesteld door een vector van lengte 1.*

2. *De toestand ψ van een fysisch systeem wordt eveneens voorgesteld door een vector van lengte 1.*

3. *De voorwaardelijke kans $P(A|\psi)$ dat het antwoord op de vraag A 'ja' is, gegeven dat de toestand van het systeem ψ is, wordt gegeven door*

$$P(A|\psi) = | < A, \psi > |^2. \tag{9.16}$$

Zoals gezegd hoeven dergelijke vectoren niet in het platte vlak te liggen, en in het algemeen moeten in de kwantumtheorie bovendien *complexe* vectoren worden gebruikt. Om die reden hebben we in (9.16) (voor degenen die daar al mee vertrouwd zijn) de absolute waarde $| < A, \psi > |$ van het (in principe complexe) getal $< A, \psi >$ geschreven. Maar deze complicatie is niet nodig in dit project: de vectoren zijn niet complex en je kunt (9.16) dan gewoon lezen als

$$P(A|\psi) =< A, \psi >^2 . \tag{9.17}$$

Stel dat een foton zich loodrecht op een gegeven plat vlak beweegt. Op een vast punt in de ruimte (bijvoorbeeld het punt waarop we een meting verrichten ofwel een vraag stellen aan het foton) wordt de toestand van het foton dan gegeven door een vector in het bewuste platte vlak. De interpretatie van deze vector is als volgt:

- Gezien als *toestand* beschrijft een vector $\psi = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een foton dat is gepolariseerd in de richting waarin de vector wijst. Met andere woorden, de trilling van het electromagnetsich veld (die licht in feite is) vindt op en neer plaats in de gegeven richting.

Maar we hebben gezien dat een dergelijke vector ook een vraag kan voorstellen. Dat zit zo:

- Gezien als *vraag* beschrijft een vector $A = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de vraag: 'wordt een foton doorgelaten door een polarisator met polarisatie-as in de richting waarin A wijst?'

We nemen nu de x-as in het gegeven platte vlak als referentie-as, zodat de vector

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

per definitie hoek 0 heeft. Hier staat h voor 'horizontaal'. De vector

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

wijst recht omhoog (vandaar de naam v voor verticaal) en maakt dus een hoek $\pi/2$ met de referentie-as. Een vector met lengte 1 die een willekeurige hoek θ met de x-as maakt kan worden geschreven als

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = h\cos\theta + v\sin\theta. \tag{9.20}$$

Stel nu dat A de vraag is: 'wordt een foton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek θ_A maakt met de x-as?' Deze vraag is dus wiskundig een vector

$$A = h\cos\theta_A + v\sin\theta_A. \tag{9.21}$$

En stel dat het foton waar de vraag aan wordt gesteld (i.e. waaraan de bewuste meting wordt verricht) in een toestand

$$\psi = h\cos\theta + v\sin\theta \tag{9.22}$$

is. Bij de volgende afleidingen zul je veelvuldig gebruiken dat

$$< v, w >= 0. \tag{9.23}$$

Als je de zaak goed hebt begrepen en handig bent in het manipuleren van sinus en cosinus kun je nu laten zien dat

$$P(A = +|\psi) = \cos^2(\theta_A - \theta). \tag{9.24}$$

Evenzo geldt:

$$P(A = -|\psi) = \sin^2(\theta_A - \theta). \tag{9.25}$$

Er zijn twee manieren om (9.25) te begrijpen:

1. Het foton wordt wel doorgelaten of het wordt niet doorgelaten: de kans dat het niet wordt doorgelaten is dus

$$P(A = -|\psi) = 1 - P(A = +|\psi) = 1 - \cos^2(\theta_A - \theta) = \sin^2(\theta_A - \theta). \tag{9.26}$$

2. Uit de fysica van de situatie volgt dat de kans dat een foton *niet* wordt doorgelaten onder een bepaalde hoek α gelijk is aan de kans dat het *wel* wordt doorgelaten onder een hoek $\alpha + \pi/2$. Daarmee geldt
$$P(A = -|\psi) = P(A^{\perp} = +|\psi), \tag{9.27}$$
waar $A^{\perp}$ de vraag is die wordt voorgesteld door de vector
$$A^{\perp} = h \sin\theta_A - v \cos\theta_A, \tag{9.28}$$
omdat dit precies de vector is die loodrecht staat op A. De vgl. (9.27) en (9.28) leiden opnieuw na een berekening tot (9.25).

10 Twee fotonen

In Hoofdstuk 7 ging het over twee fotonen, niet één. Om een systeem dat uit twee of meer deeltjes bestaat te beschrijven is het begip *product* van vectoren nodig (technisch heet dit eigenlijk *tensorproduct*). Je weet dat je twee vectoren op kunt tellen volgens (9.2); dit geeft opnieuw een vector in het platte vlak. Maar het product $v \otimes w$ van twee vectoren in het platte vlak is een heel andere zaak; $v \otimes w$ ligt niet in $\mathbb{R}^2$ maar in een ruimte van dimensie 4! Dit is helaas niet meer voorstelbaar. Gelukkig is het in de moderne wiskunde zo, dat grootheden en operaties worden bepaald door hun eigenschappen en niet door hun aanschouwelijkheid; we hebben daar al eerder op gewezen i.v.m. de begrippen vector en inproduct.

Alle eigenschappen van het product van twee vectoren die je nu nodig hebt zijn als volgt:

1. Je kunt producten van vectoren manipuleren alsof het getallen zijn en $\otimes$ het gewone vermenigvuldigingsssymbool is, bijv.
$$(v + w) \otimes z = v \otimes z + w \otimes z; \tag{10.1}$$
$$v \otimes (w + z) = v \otimes w + v \otimes z. \tag{10.2}$$

2. Als t een getal is en v en w vectoren, dan geldt
$$t(v \otimes w) = (tv) \otimes w = v \otimes (tw). \tag{10.3}$$
Hier zijn tv en tw gegeven door (9.5).

3. Inproducten worden als volgt uitgerekend:
$$< v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 >=< v_1, v_2 > \cdot < w_1, w_2 > . \tag{10.4}$$

Het is *niet* zo dat $v \otimes w = w \otimes v$!

Het blijkt nu dat vragen aan en toestanden van samengestelde systemen (zoals een fotonpaar) wiskundig worden voorgesteld door producten van vectoren, en/of mogelijke sommen daarvan. Om dit te illustreren geven we vectoren die het linkerfoton beschrijven een label L mee, zodat vragen aan het linkerfoton A_L heten en toestanden daarvan v_L etc. Soortgelijk rechts met het label R. Een mogelijke toestand van het fotonpaar is dan $\psi_L \otimes \psi_R$, met
$$\psi_L = h_L \cos\theta + v_L \sin\theta \tag{10.5}$$
$$\psi_R = h_R \cos\alpha + v \sin\alpha. \tag{10.6}$$

Het fotonpaar in het experiment van Hoofdstuk 7 bevindt zich echter in de toestand
$$\Psi_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_L \otimes h_R + v_L \otimes v_R) . \tag{10.7}$$

Hier staat EPR voor Einstein, Podolsky en Rosen, de auteurs van een beroemd artikel uit 1935 dat het hoogtepunt vormde van het debat tussen Bohr en Einstein. Deze zogenaamde EPR-toestand is *niet* van de vorm $h_L \otimes h_R$ of $v_L \otimes v_R$. Het blijkt dat correlaties van de soort die de Bell-ongelijkheden schenden altijd worden veroorzaakt door tweedeeltjes-toestanden die sommen van producten van vectoren zijn. Dergelijke correlaties worden daarom vaak EPR-correlaties genoemd; ze vormen het meest mysterieuze en controversiële aspect van de kwantumtheorie.

Ook vragen worden op deze wijze gecombineerd: de vraag

> 'wordt het linkerfoton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek θ_A maakt met de x-as en wordt tegelijk het rechter foton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek θ_B maakt met de x-as?'

wordt wiskundig voorgesteld door de productvector $A_L \otimes B_R$, met

$$A_L = h_L \cos\theta_A + v_L \sin\theta_A; \tag{10.8}$$
$$B_R = h_R \cos\theta_B + v_R \sin\theta_B. \tag{10.9}$$

Volgens (9.16) gelden dan formules als

$$P(A_L = + \,\&\, B_R = -|\Psi) = |<A_L \otimes B_R, \Psi>|^2. \tag{10.10}$$

Vul in deze formule nu (10.8), (10.9) in en neem de toestand $\Psi = \Psi_{\mathrm{EPR}}$; zie (10.7). Bij de dan volgende berekening heb je goniometrische formules nodig als

$$\cos(\theta_A - \theta_B) = \cos\theta_A \cos\theta_B + \sin\theta_A \sin\theta_B; \tag{10.11}$$
$$\sin(\theta_A - \theta_B) = \sin\theta_A \cos\theta_B + \cos\theta_A \sin\theta_B. \tag{10.12}$$

Er komt dan uiteindelijk uit:

$$P(A_L = + \,\&\, B_R = +|\Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_A - \theta_B); \tag{10.13}$$
$$P(A_L = - \,\&\, B_R = -|\Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_A - \theta_B); \tag{10.14}$$
$$P(A_L = + \,\&\, B_R = -|\Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B); \tag{10.15}$$
$$P(A_L = - \,\&\, B_R = +|\Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B). \tag{10.16}$$
$$\tag{10.17}$$

Als je nu $\theta_B = \theta_A$ enz. kiest, volgen (7.3) - (7.6) onmiddellijk. Voor $\theta_B \neq \theta_A$ enz. zijn nu ook (7.12) - (7.14) evident.

De eenvoudigste manier om de formules (7.1) en (7.2) af te leiden is als volgt: je gebruikt het feit dat

$$P(A_L = +|\Psi) = P(A_L = + \,\&\, B_R = +|\Psi) + P(A_L = + \,\&\, B_R = -|\Psi), \tag{10.18}$$

kiest opnieuw $\Psi = \Psi_{\mathrm{EPR}}$, en vult dan de zojuist verkregen formules (10.13) en (10.15) in. De identiteit

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{10.19}$$

geeft dan het gezochte antwoord.

11 Epiloog

Je vraagt je misschien af waarom we het allemaal zo ingewikkeld gemaakt hebben: waarom bijvoorbeeld het hele gedoe met experimenten links en rechts, terwijl we toch over Bell-ongelijkheden voor drie vragen beschikken? De noodzaak hiertoe volgt uit een aspect van de kwantumtheorie dat we niet hebben behandeld, namelijk het probleem van het gelijktijdig meten van twee (of meer) verschillende microscopische grootheden (zoals de polarisatie van een foton). Het volgt uit de beroemde *onzekerheidsrelaties van Heisenberg* (1927) dat je aan een microscopisch systeem niet zomaar twee vragen tegelijk mag stellen - in ieder geval niet binnen het raamwerk van de kwantumtheorie. Als je dit toch doet, blijken schijnbaar vanzelfsprekende uitdrukkingen als

$$P(A = +|\Psi) = P(A = + \,\&\, B = +|\Psi) + P(A = + \,\&\, B = -|\Psi) \tag{11.20}$$

niet te gelden. Dit probleem wordt echter vermeden door de slimme opzet van Einstein, waarin de vragen zeer ver van elkaar verwijderd worden gesteld. Als je goed kijkt, zie je dat alle correlaties in Hoofdstuk 7 zijn gedefinieerd tussen enerzijds variabelen links (L) en anderzijds variabelen rechts (R). Hetzelfde geldt voor de Bell-ongelijkheden voor vier variabelen, als we aannemen dat de vragen A en B op het linkerfoton slaan en de vragen C en D op het rechter; zie (6.3) - (6.6). Ook in dat geval kunnen de twee metingen of vragen elkaar niet beïnvloeden. Het is dus niet zo dat de Bell-ongelijkheden in de kwantumtheorie worden geschonden omdat je in die theorie nu eenmaal niet meerdere vragen tegelijk mag stellen. In de opzet van Einstein mag dat wel, ook volgens de kwantumtheorie.

De schending van de Bell-ongelijkheden impliceert dat de fotonen de onderzochte eigenschappen (zoals $A_L = +$ enzovoort) *niet* al kunnen hebben voordat de desbetreffende meting wordt verricht: anders kom je automatisch in het vaarwater van de Aanname van Einstein in Hoofdstuk 7 terecht, en zoals we hebben gezien leidt die onherroepelijk tot de Bell-ongelijkheden. Het feit dat atomaire deeltjes in die zin geen eigenschappen hebben wordt soms samengevat door de uitspraak dat volgens de kwantumtheorie "de werkelijkheid niet bestaat". Dit is overdreven: de juiste conclusie is dat de werkelijkheid *die een waarnemer waarneemt* niet alleen wordt beïnvloed door die waarnemer, maar in zekere zin zonder hem of haar zelfs niet zou hebben bestaan. Dat is in de klassieke natuurkunde niet het geval; daar valt de waargenomen werkelijkheid samen met de werkelijkheid zonder waarnemers. In deze zin is de kwantumtheorie wezenlijk anders dan de klassieke mechanica, maar ook op kwantumniveau is er een werkelijkheid. Deze is echter niet voor ons toegankelijk.

In dit licht bezien is het soort correlaties dat we in Hoofdstuk 7 bestudeerd hebben toch weer iets begrijpelijker geworden. Naïef gesproken wekt (7.7) de indruk dat als vraag A_L door Leo aan het linkerfoton gesteld wordt en het antwoord ja is (waardoor de eigenschap $A_L = +$ als het ware 'werkelijk' wordt), dan ook de eigenschap $A_R = -$ onmiddellijk werkelijk wordt, zelfs als aan die kant door Ruud geen meting wordt verricht. Maar dit is een misvatting. Als links $A_L = +$ wordt gemeten, zegt dit nog niets over de metingen die rechts kunnen worden verricht. Zelfs na een dergelijke meting door Leo kun je zonder aanvullende meting door Ruud niet zeggen of de vragen A_R, B_R, of C_R nu plotseling een antwoord hebben. Maar bij die aanvullende meting heeft Ruud de keuze tussen de vragen A_R, B_R, en C_R. Als hij A_R kiest en niet weet wat Leo heeft gemeten, *en zelfs als hij wel weet dat Leo A_L heeft gemeten maar niet zijn antwoord kent* (en dat antwoord kan Ruud inderdaad niet weten als hij ver van Leo verwijderd is en er niet tussen beiden is gecommuniceerd), dan zijn de mogelijke uitkomsten voor Leo nog altijd $A_R = +$ en $A_R = -$, ieder met kans $\frac{1}{2}$ (zie (7.2)). Pas als Leo en Ruud hun meetresultaten vergelijken, komen ze er achter dat de correlatie (7.7) bestaat. Maar dan zijn hun gegevens al lang niet meer ver van elkaar verwijderd; ze hebben ze immers kunnen vergelijken. In deze zin zijn de correlaties (7.7) in overeenstemming met de Natuurwet in 7.

De vraag blijft waarom wij op macroscopisch niveau de indruk hebben dat de wereld om ons heen grotendeels onafhankelijk van ons is, en het soort dubbelzinnigheid of onbepaaldheid waarvan in het fotonexperiment uit Hoofdstuk 7 sprake is, in het dagelijks leven geen enkele rol lijkt te spelen. Met andere woorden, er zijn eigenlijk twee raadsels: ten eerste is de onbepaaldheid op microniveau op zijn minst merkwaardig (zoals gezegd heeft Einstein deze nooit kunnen accepteren), en ten tweede blijkt deze onbepaaldheid weer te verdwijnen zodra we niet meer in het klein maar in het groot kijken. Een gerelateerde vraag is hoe het deterministische karakter van de klassieke natuurkunde van Newton (zie de Inleiding) verenigbaar is met het indeterminisme van de kwantumtheorie. Deze problemen zijn actief onderwerp van modern onderzoek in de natuurkunde en de wiskunde, en op dit moment zijn er bijna net zo veel meningen als onderzoekers.

Juist omdat de klassieke natuurkunde deterministisch is, hebben wij in de Inleiding stellig beweerd dat het soort toeval dat in het dagelijks leven een rol speelt altijd een gevolg is van onwetendheid en daarmee niet intrinsiek is. Er is echter een andere mogelijkheid, namelijk dat het intrinsieke toeval op kwantumniveau zich op de een of andere manier een weg weet te banen naar het menselijk brein. Je zou hierbij kunnen denken aan radioactief verval van een atoomkern in de hersens, waarbij je besluit om wél naar een bepaald feestje te gaan als de kern vervallen is op het moment dat je de beslissing neemt, en om niet te gaan als de kern dan nog intact is. Het is zeer omstreden of een dergelijk scenario überhaupt mogelijk is. Aan de ene kant is ons brein opgebouwd uit neuronen etc., en die bestaan weer uit moleculen, die op hun beurt weer uit atomen (met kernen en elektronen) bestaan. Volop ruimte voor kwantumtheorie dus. Maar aan de andere kant zijn er sterke aanwijzingen dat de werking van het brein volledig wordt beheerst door de klassieke natuurkunde, en dan met name door elektrische processen. De meerderheid van de onderzoekers gelooft daarom niet in een rol voor de kwantumtheorie, maar de minderheid die daar wel in gelooft omvat enkele zeer prominente denkers (zoals de Engelse wiskundige Roger Penrose).

Er wordt zelfs gesuggereerd dat het bewustzijn alleen bij gratie van de kwantumtheorie kan bestaan: als onze handelingen namelijk volledig bepaald zouden zijn, hetgeen het deterministische karakter van de klassieke natuurkunde lijkt af te dwingen, zou er geen enkel evolutionair voordeel zijn bij het hebben van een bewustzijn. Sterker nog, dat leidt alleen maar tot verwarring! De boeken van Penrose gaan hier nader op in (zie de bibliografie). Hodgson geeft in zijn boek nog een ander argument waarom de kwantumtheorie cruciaal zou zijn voor het bewustzijn, en wel vanwege de niet-localiteit van correlaties als (7.7). Dit houdt in dat, zoals we gezien heben, de toevalsprocessen die met elkaar gecorreleerd zijn te ver van elkaar verwijderd zijn om elkaar direct te beïnvloeden. Het feit dat er dan toch correlaties mogelijk zijn is volgens Hodgson de reden dat verschillende gebieden in het brein op ieder moment zo sterk met elkaar in contact kunnen staan dat alle gegevens die her en der zijn opgeslagen kunnen worden samengevoegd tot één enkel beeld van de wereld, zoals het bewustzijn ons dat ook daadwerkelijk geeft.

In dit licht wordt soms ook een verband gesuggereerd tussen kwantumtheorie en het probleem van de vrije wil. We kunnen in dit bestek geen recht doen aan de enorme complexiteit van dit probleem, waar wagen toch een poging dit verband kort uit te leggen. Tegenstanders van de vrije wil hebben in de moderne tijd makkelijk praten. Zij beweren dat de mens een soort robot is, wiens handelen volledig wordt bepaald door de natuurwetten. Er zijn dan twee mogelijkheden. Als deze wetten deterministisch zijn is er geen ruimte voor vrije keuzes, omdat alles tenslotte al van tevoren is bepaald. Als de natuurwetten daarentegen ruimte laten voor toeval, geeft dat evenmin de mogelijkheid van een vrije wil, omdat keuzes die door toeval zijn bepaald (zoals de bovengenoemde beslissing om al dan niet naar een feestje te gaan) moeilijk vrij genoemd kunnen worden. Voorstanders van de vrije wil hebben het in een wetenschappelijk debat moeilijker. Het sterkste argument voor de vrije wil is dat wij denken er een te hebben. Een ander vaak gehoord argument is dat het menselijk leven zonder een vrije wil zinloos en leeg zou zijn, te vergelijken met een door robots bewoonde wereld. In het bijzonder bestaat er dan geen moraal, en zou straffen en belonen onzinnig zijn. Gelovigen wijzen er dan op dat God de mens heeft geschapen met een vrije wil, opdat wij een keuze kunnen maken tussen goed en kwaad. Soms wordt ook opgemerkt dat grote kunstwerken, zoals de toneelstukken van Shakespeare of de muziek van Beethoven, ondenkbaar zijn zonder de vrije wil van de artiest.

Tegenstanders van de vrije wil begroeten de argumenten van de tegenpartij vaak met hoongelach, en wijzen op hun onderliggende religieuze of morele agenda. Voorstanders proberen denkfouten aan te tonen in de argumenten tegen de vrije wil. Dikwijls blijken de beide partijen langs elkaar heen te praten, omdat men niet hetzelfde bedoelt met het begrip vrije wil. Maar het argument van de tegenstanders dat toeval geen rol kan spelen in dit debat is moeilijk te weerleggen. Om een rol voor kwantumtheorie en de schending van de Bell-ongelijkheden te vinden, kunnen voorstanders zich daarom beter richten op de *onbepaaldheid* die de kwantumtheorie aan de wereld (en i.h.b. aan het brein) geeft, dan op het (mogelijk) toevallige karakter van haar voorspellingen. Want onbepaaldheid in de een of andere zin is natuurlijk een absolute voorwaarde voor de mogelijkheid van een vrije wil. Zij moeten dan vervolgens beargumenteren dat de manier waarop het onbepaalde bepaald wordt, zoals in dit boekje het al dan niet doorgelaten worden van een foton door een polaroid glas, te maken heeft met het uitoefenen van de vrije wil ofwel het nemen van een beslissing. Een dergelijk argument kan pas serieus worden genomen als zeer veel meer over de werking van het brein en het bewustzijn bekend is dan nu het geval is, en wij wachten dan ook met spanning op de uitkomst van dit debat.